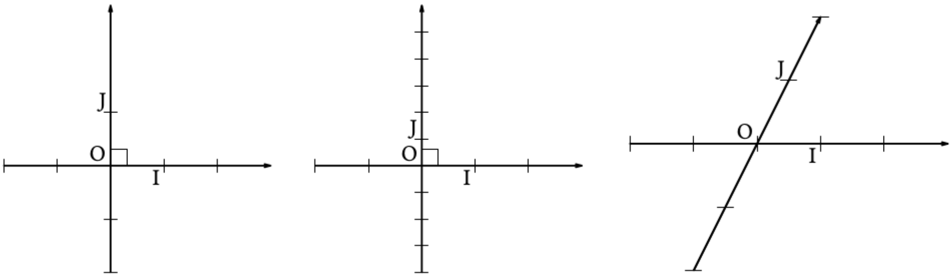
1 Rappels

En Mathématiques, il existe plusieurs type de repères du plan.

repère orthonormé   repère orthogonal   repère cartésien



Dans un repère noté (O,I,J) quelconque :
- Le point O est l'origine du repère ;
- L'axe des abscisses est la droite (OI), graduée dans le sens de O vers I, avec OI comme unité de longueur.
- L'axe des ordonnées est la droite (OJ), graduée dans le sens de O vers J, avec OJ comme unité de longueur.

Dans un repère du plan, les coordonnées d'un point M sont données sous la forme suivante :

$$M(\text{abscisse}; \text{ordonnées})$$

On note souvent ainsi : $M(x_M; y_M)$.

Propriété n° 1

Dans tout repère du plan, les coordonnées M, du milieu de [AB] sont :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

EXERCICE 1

Dans un repère (O ; I ; J), on donne les points P(-1 ;1), Q(3 ;-1) et R(-2 ;-5).

1. Calculer les coordonnées du milieu A de [PR] ;
2. On note S le point tel que PQRS est un parallélogramme.
   Placer S sur le dessin, puis calculez ses coordonnées.

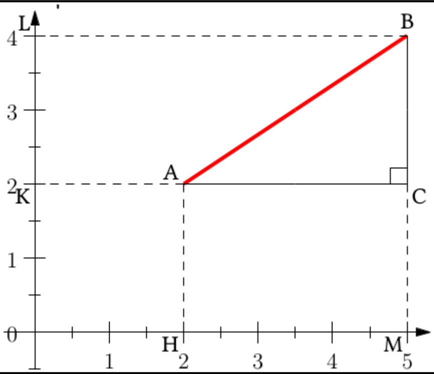
EXERCICE 2

Dans un repère (O ;I ;J), on donne les points de coordonnées suivantes :
$R(-1; 4)$; $S(2; 1)$; $T(3; 0)$ et $U(4; 3)$.
Montrer que $RSTU$ est un parallélogramme.

2 Repère orthonormé : Calculs de distances

Définition

Un repère orthonormé (O ;I ;J) est un repère tel que :
$(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ = 1$ (unité de longueur.)



Propriété n° 2

La longueur du segment [AB] se calcule ainsi :
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Remarque : On utilise fréquemment la formule suivante :

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Exercice 3

(O, I, J) est un repère orthonormé
On considère les points $A(3;3)$, $B(1;-1)$ et $C(-1;0)$.

1. Faire une figure.
2. Calculer les distances AB,AC et BC.
3. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
4. Calculer les coordonnées du point P, centre du cercle circonscrit au triangle ABC et le rayon de ce cercle.
5. Déterminer les coordonnées de D tel que $ABCD$ soit un rectangle.

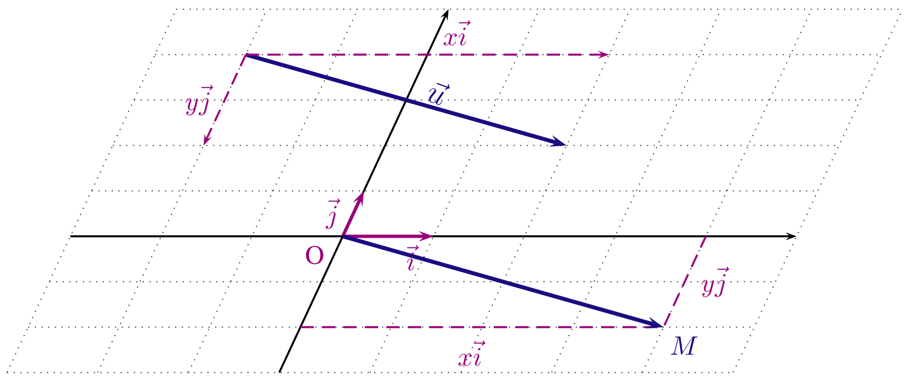
3 Coordonnées d'un vecteur

Le repère (O, I, J)devient le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, en prenant le vecteur $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

Définition

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\vec{u}$ un vecteur.
On appelle coordonnées du vecteur $\vec{u}$ les coordonnées du point $M\,(x; y)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

On note indifféremment $\vec{u}\,(x; y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.



Remarque : Pour lire les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ dans un repère, on observe le déplacement entre l'origine et l'extrémité de ce vecteur par rapport aux axes.

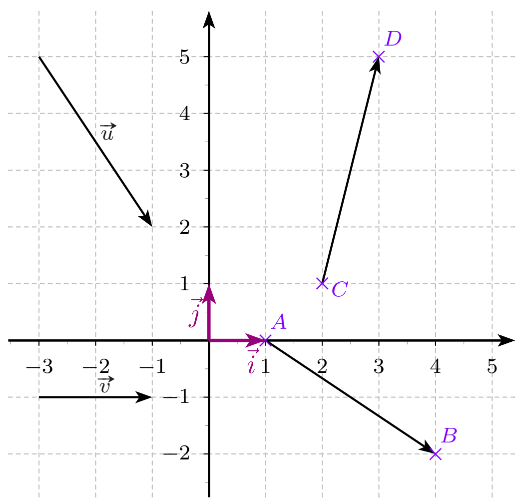
Propriété

- $(x; y)$ sont les coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ signifie que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
- $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ signifie que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

EXERCICE 4

1. Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$.

2. Tracer un représentant du vecteur $\vec{k}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et un représentant du vecteur $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$



Remarque : Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.
Si le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé, alors on appelle norme du vecteur $\vec{u}$ la longueur du vecteur $\vec{u}$.
Celle-ci est notée $||\vec{u}||$ et $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4 Propriétés des coordonnées

Propriété

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan, $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs :

- $\vec{u} = \vec{0}$ équivaut à $x = 0$ et $y = 0$.
- $\vec{u} = \vec{v}$ équivaut à $x = x'$ et $y = y'$.
- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.
- Le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x-x'\\y-y'\end{pmatrix}$.
- pour tout réel k, le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.

EXERCICE 5

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$

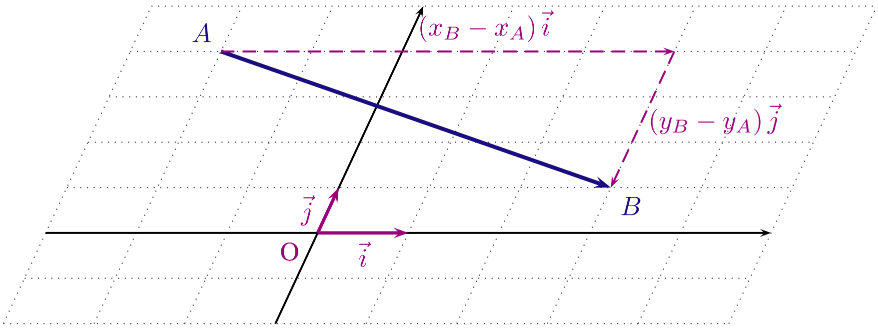
1. Calculer les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$.
2. Calculer les coordonnées de $\vec{u} - \vec{v}$.

5 Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Propriété

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan et deux points $A\,(x_A; y_A)$ et $B\,(x_B; y_B)$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$.



EXERCICE 6

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $A(5; 2)$, $B(1; -2)$, $C(0; -3)$ et $D(-2; -1)$.

Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

EXERCICE 7

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère $A(3; 2)$, $B(5; 1)$, $C(3; -2)$ et $D(1; -1)$.

Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

Que peut-on en déduire sur la nature de $ABCD$?

EXERCICE 8

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère $A(-2; 3)$, $B(1; -1)$, $C(2; 4)$ et $D(x_D; y_D)$.

Calculer les coordonnées de D pour que $ABDC$ soit un parallélogramme.

6 Vecteurs colinéaires

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.
Deux vecteurs colinéaires sont donc deux vecteurs ayant même direction.

7 Condition de colinéarité

Soit $\left(\text{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère du plan.

Propriété

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si, et seulement si,

$$xy' - x'y = 0$$

Exercice 9

Vérifier pour chaque question si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

a. $A(-3;2)$, $B(3;3)$, $C(-3;-3)$ et $D(5;1)$.

b. $A(0;5)$, $B(3;0)$, $C(-3;8)$ et $D(3;-2)$.

Exercice 10

Déterminer la valeur de x pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ x-1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ x-5 \end{pmatrix}$

b. $\vec{u}\begin{pmatrix} 2x \\ 3x+1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

c. $\vec{u}\begin{pmatrix} x+3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ x-3 \end{pmatrix}$