1 Notion de taux d'accroissement

1.1 Définition

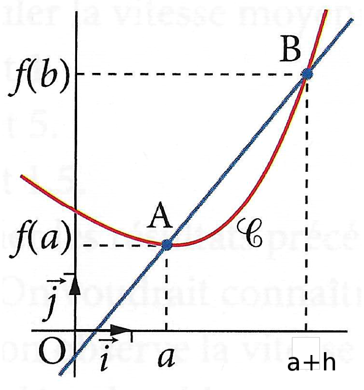
Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux réels distincts de I.
On appelle taux d'accroissement entre a et b le réel :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

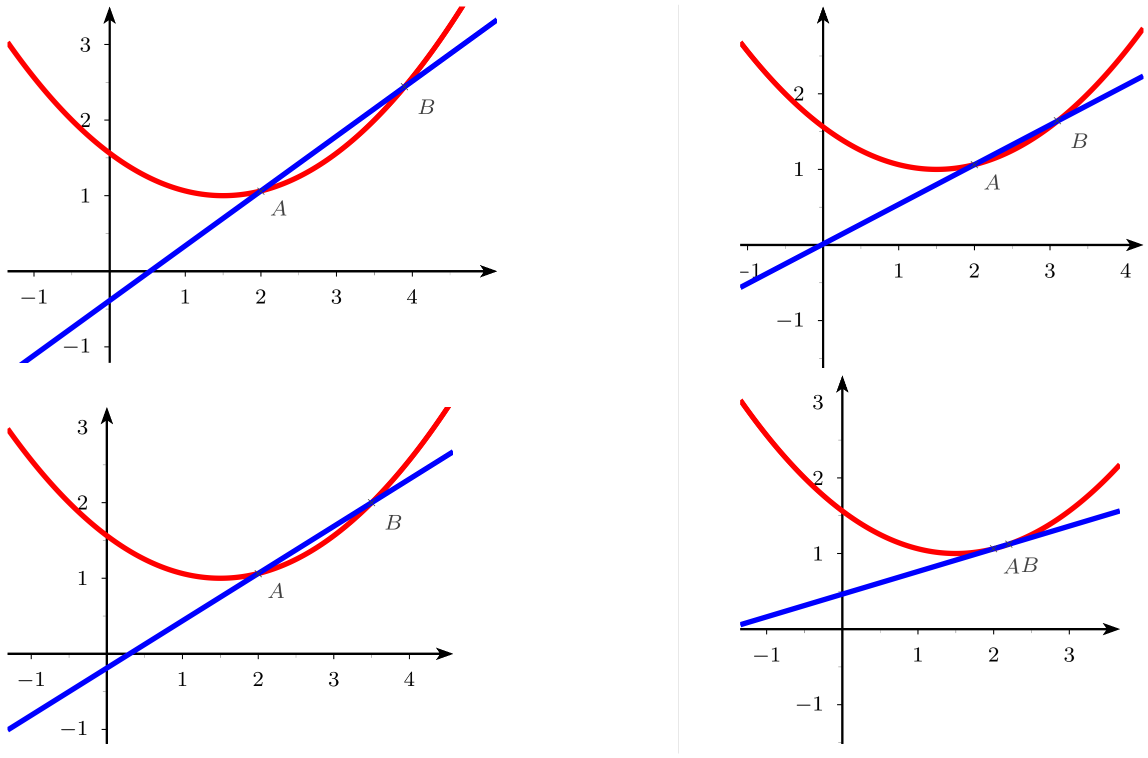
1.2 Interprétation graphique

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $\mathscr{C}$ sa représentation graphique, A et B les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives a et $a+h$.
Le taux d'accroissement de la fonction f entre a et $a+h$ est égal au coefficient directeur de la droite (AB)



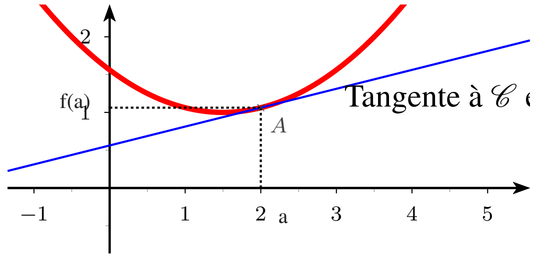
- Si ce taux est positif, la droite (AB) « monte », donc la fonction affine g dont la représentation graphique passe par A et B, sera croissante sur $[a\,;a+h]$.
- Si ce taux est négatif, la droite (AB) « descend », donc la fonction affine g dont la représentation graphique passe par A et B, sera décroissante sur $[a\,;a+h]$.
- Si ce taux est nul, la droite (AB) « est horizontale », donc la fonction affine g dont la représentation graphique passe par A et B, sera constante sur $[a\,;a+h]$.

2 Tangente à une courbe – Nombre dérivé



Lorsque le réel h tend vers 0, le point B se rapproche du point A et la droite (AB) se rapproche d'une droite « limite ».

On appelle tangente à une courbe $\mathscr{C}$ en un point A d'abscisse a, la position limite des droites (AB) lorsque le réel h tend vers 0.



Définition

Le nombre dérivé de f en a, s'il existe, est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a, il est noté $f'(a)$ « f prime de a ».

3 Nombre dérivé en un point des fonctions de références

3.1 Fonction affine

Propriété

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ (m et p étant deux réels). Le nombre dérivé de la fonction f au point d'abscisse a est $f'(a) = m$

Exemple

$f(x) = 2x - 5$.
Le nombre dérivé de f au point d'abscisse -1 sera 2.

Remarque :
- Ici, comme la représentation graphique d'une fonction affine est une droite, la tangente en n'importe quel point correspond à la droite.
- Si la fonction est constante, alors le nombre dérivé en tout point de $\mathbb{R}$ est nul..., logique car il n'y a pas d'accroissement !

3.2 Fonction carré

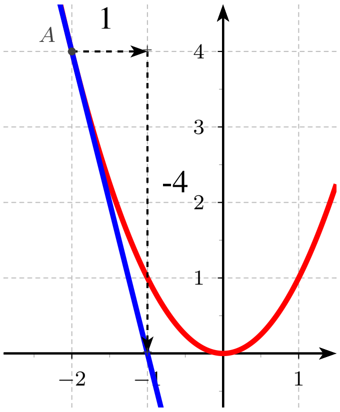
Propriété

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Le nombre dérivé de la fonction f au point d'abscisse a est $f'(a) = 2a$

Exemple

Le nombre dérivé de la fonction x^2 au point d'abscisse -2 sera égal à $2 \times (-2) = -4$.
Le coefficient de la tangente à la courbe au point d'abscisse -2 sera donc de -4.

Vérification par le graphique :



3.3 Fonction cube

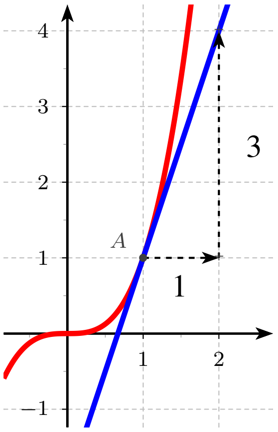
Propriété

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
Le nombre dérivé de la fonction f au point d'abscisse a est $f'(a) = 3a^2$

Exemple

Le nombre dérivé de la fonction x^3 au point d'abscisse 1 sera égal à $3 \times 1^2 = 3$.
Le coefficient de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 sera donc de 3.

Vérification par le graphique :



3.4 Fonction racine carrée

Propriété

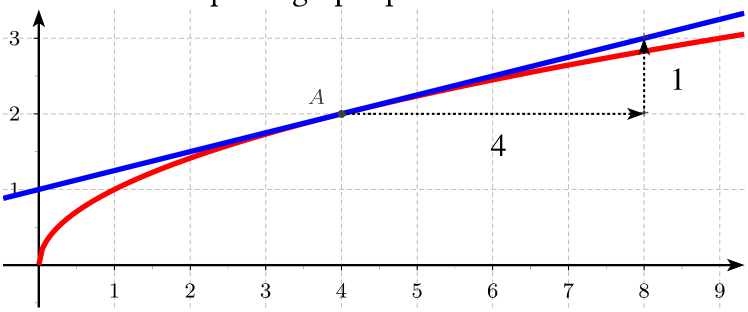
La fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
Le nombre dérivé de la fonction f au point d'abscisse a ($a \neq 0$)est $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

Exemple

Le nombre dérivé de la fonction $\sqrt{x}$ au point d'abscisse 4 sera égal à $\dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$.

Le coefficient de la tangente à la courbe au point d'abscisse 4 sera donc de $\dfrac{1}{4}$.

Vérification par le graphique :



3.5 Fonction inverse

Propriété

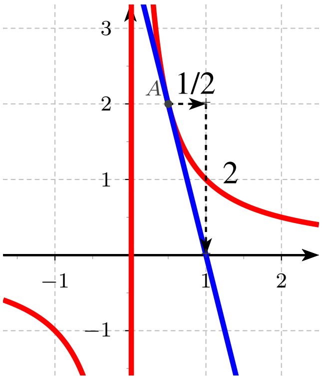
La fonction f définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Le nombre dérivé de la fonction f au point d'abscisse a ($a\neq 0$)est $f'(a)=-\dfrac{1}{x^2}$

Exemple

Le nombre dérivé de la fonction $\dfrac{1}{x}$ au point d'abscisse $0,5$ sera égal à $-\dfrac{1}{0,5^2}=-\dfrac{1}{0,25}=-4.$
Le coefficient de la tangente à la courbe au point d'abscisse $0,5$ sera donc de $-0,25$.

Vérification par le graphique :



4 Propriétés

4.1 Nombre dérivé d'une somme de deux fonctions

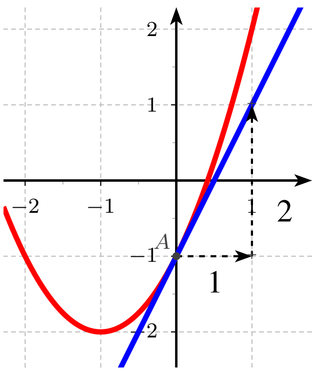
Propriété

Soit u et v deux fonctions.
Le nombre dérivé de la fonction $(u+v)$ au point d'abscisse a est $u'(a)+v'(a)$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+2x-1$
En choisissant comme fonction u la fonction $u(x)=x^2$ et v la fonction $v(x)=2x-1$.
f est bien égale à $u+v$.
Donc $f'(0)=u'(0)+v'(0)=2\times 0+2=2$ Le coefficient de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 sera donc de 2.

Vérification par le graphique :



4.2 Nombre dérivé d'une fonction multipliée par un réel

Propriété

Soit f un nombre réel et u une fonction définie sur un intervalle I.
Le nombre dérivé de la fonction (ku) au point d'abscisse a est égal à $ku'(a)$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{4}{x}$

En choisissant comme fonction u la fonction $u(x)=\dfrac{1}{x}$ et k le nombre 4.

f est bien égale à ku.

Donc $f'(1)=ku'(1)=4\times\left(-\dfrac{1}{1^2}\right)=-4$ Le coefficient de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 sera donc de -4.