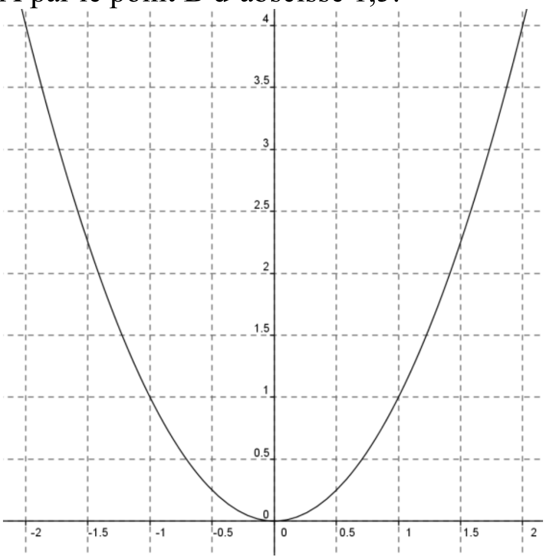
1 Calculer le nombre dérivé de la fonction f au point d'abscisse a :

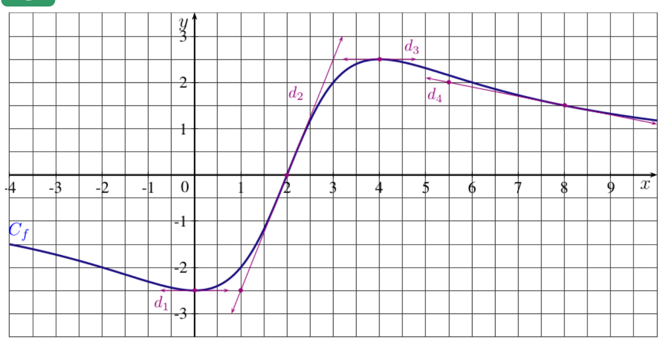
1. $f(x) = x^2$ et $a = 5$.
2. $f(x) = x^2$ et $a = -1$.
3. $f(x) = x^3$ et $a = -2$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $a = \dfrac{1}{2}$.
5. $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 4$.
6. $f(x) = 3x - 5$ et $a = 2$

2 La courbe $\mathscr{C}$ de la fonction $f(x) = x^2$ est représentée dans le repère ci-dessous.

1. a. Placer le point A d'abscisse – 1.
   b. Calculer le nombre dérivé de f au point d'abscisse – 1.
   c. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse – 1.
   d. Tracer la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse – 1.
   e. Déterminer son équation.
2. Reprendre la question 1 en remplaçant le point A par le point B d'abscisse 1,5.

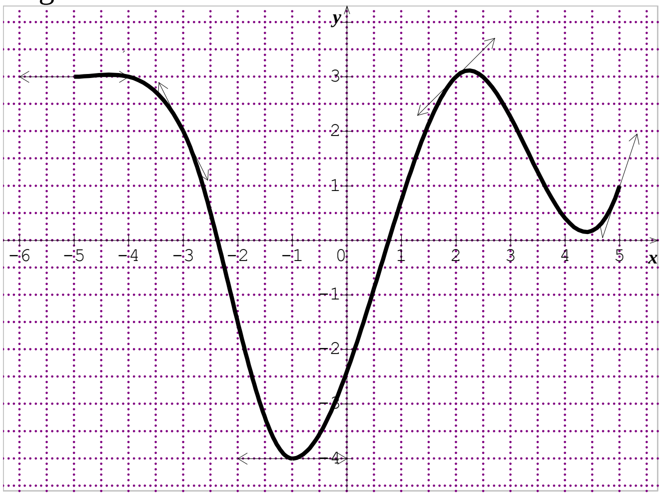


3



1. Déterminer graphiquement f (0), f (2), f (4) et f (8).
2. Déterminer graphiquement les nombres dérivés f'(0), f'(2) , f'(4) et f'(8).

4 On a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f ainsi que certaines de ses tangentes.



1. Donner les valeurs de f(2) et de f '(2).
2. Lire les valeurs de f '(-5), f '(-3), f '(-1) et f '(5).

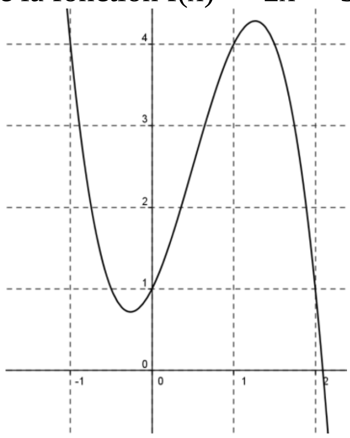
5 Calculer le nombre dérivé de la fonction f au point d'abscisse a :

1. $f(x) = 4x^2$
2. $f(x) = -5x^2 + 3x + 2$
3. $f(x) = 3x^3 - 4x + 5$
4. $f(x) = \dfrac{3}{x}$
5. $f(x) = 8\sqrt{x} - x + 1$
6. $f(x) = 7x - 3$
7. $f(x) = 8$

6 Calculer le nombre dérivé de la fonction f au point d'abscisse a :

1. $f(x) = 7x^3 - 4x^2+x+1$
2. $f(x) = 3\sqrt{x} - 4x$
3. $f(x) = 2x - 1$
4. $f(x) = \dfrac{7}{x} + x$
5. $f(x) = -5$
6. $f(x) = 9x^2 - 3x + 5x^3$

7 La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la représentation graphique de la fonction $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$



Tracer précisément la tangente à $\mathscr{C}$ en : 1 ; 0 et -1.

8 **Antenne parabolique**

La courbe représentant la coupe verticale d'une antenne parabolique a pour équation dans un repère (O ; I, J), $y = \frac{1}{4}x^2$.

Le but de cet exercice est de découvrir, par une construction minutieuse, la propriété géométrique des paraboles qui explique l'utilisation de cette forme pour une antenne.

1. Tracer soigneusement dans le repère (O ; I, J) (unité 2 cm), la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f sur [– 3 ; 3].

2. a. Tracer la tangente T_1 à la courbe $\mathcal{C}$ au point A_1 d'abscisse 1, la tangente T_{-2} à la courbe $\mathcal{C}$ au point A_2 d'abscisse –2 et la tangente T_3 à la courbe $\mathcal{C}$ au point A_3 d'abscisse 3.

b. Tracer les droites Δ_1, Δ_{-2} et Δ_3 respectivement orthogonales à T_1 en A_1, T_{-2} en A_2 et T_3 en A_3.

3. Étant donné la distance parcourue, on considère que tous les rayons émis par un satellite arrivent à la parabole suivant la même direction. On règle donc l'axe de la parabole (axe (Oy)) dans cette direction.

a. Représenter le rayon atteignant la parabole au point A_1 (demi-droite parallèle à (Oy) passant par A_1).

Suivant les lois de l'optique, le rayon se réfléchit symétriquement par rapport à Δ_1. Représenter en rouge le rayon réfléchi.

b. Représenter de même les rayons atteignant la parabole en A_2 et en A_3 et leurs rayons réfléchis (en rouge). Que constate-t-on ?

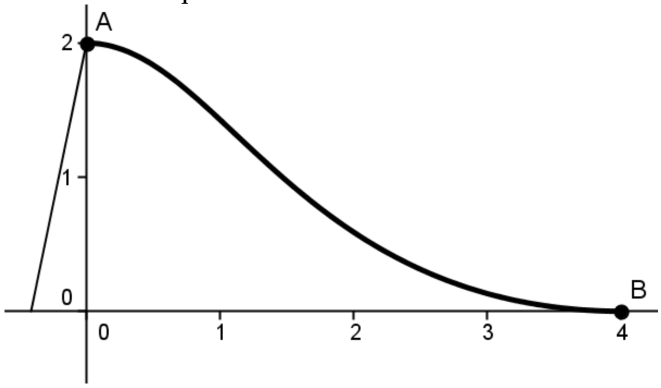
L'antenne parabolique a cette propriété : tous les rayons dirigés parallèlement à l'axe de la parabole atteignent, en se réfléchissant, un même point, appelé foyer de la parabole.

9 On veut réaliser un toboggan pour les enfants, qui se termine en pente douce. Il doit donc vérifier les conditions suivantes :

① il doit avoir une tangente en A parallèle au sol.

② il doit être tangent au sol au point B.

On considère le plan rapporté au repère orthonormal (O ; I ; J) (unité graphique 2,5 cm) comme l'indique le schéma suivant :



Les coordonnées du point A sont donc (0 ; 2), celles du point B sont (4 ; 0).

Le but du problème est de trouver des fonctions dont les courbes représentatives ont l'allure du toboggan et vérifie les conditions de l'énoncé

1. Une fonction polynôme du premier degré peut-elle convenir ? Expliquer pourquoi.

2. Soit f la fonction définie sur [0 ; 2] par $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

Soit g la fonction définie sur [2 ; 4] par $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$ et $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.

a. Démontrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont en commun le point C de coordonnées (2 ; 1).

b. Démontrer ensuite que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont la même tangente T au point C.

c. Tracer T, puis $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur un même graphique.

d. Vérifier que la courbe obtenue satisfait aux conditions ① et ②.

3. On décide de donner au toboggan, un profil correspondant à la courbe représentative d'une fonction polynôme P de degrés 3 :

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

a. Trouver la valeur de d sachant que la courbe passe par A.

b. Sachant que la courbe doit vérifier les conditions ① et ② et qu'elle passe par B trouver les valeurs de a, b et c.

c. Soit h la fonction définie sur [0 ; 4] par $h(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2$. Sur un nouveau graphique, tracer la courbe $\mathcal{C}_h$ représentant h.

Suite Exercice 9

4. *Détermination de la pente maximale.*

a. Pour a ∈ [0 ; 2], calculer le nombre dérivé f'(a). En traçant le tableau de variation de la fonction $x \longmapsto -\frac{x}{2}$, déterminer les extremums de f '(a) pour a ∈ [0 ; 2].

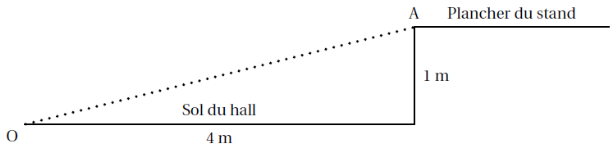
b. Pour a ∈ [2 ; 4], calculer le nombre dérivé g'(a). En traçant le tableau de variation de la fonction $x \longmapsto \frac{x}{2} - 2$, déterminer les extremums de g'(a) pour a ∈ [2 ; 4].

c. Pour a ∈ [0 ; 4], calculer h'(a). Pour quelle valeur x, le polynôme du second degré $\frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}x$ atteint-il son extremum ? Combien vaut cet extremum ?

d. Quelle est alors la pente maximale dans chacun des deux cas étudiés ? En déduire la fonction donnant la pente « la plus douce ».

10 *D'après le sujet de BAC STI AA 2006.*

Pour la construction d'un stand d'exposition, des étudiants en BTS ont besoin de créer une rampe d'accès reliant le plancher du stand au sol du hall d'exposition. Une rampe plane ne pouvant permettre l'accès aux fauteuils roulants, les élèves de BTS proposent comme solution de remplacer sur la coupe ci-dessous, le segment [OA] par une courbe $\mathcal{C}$ d'un polynôme du 3ème degré.



On choisit le repère orthonormé (O ; I, J) dans lequel le point A a pour coordonnées (4 ; 1) et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 4] par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

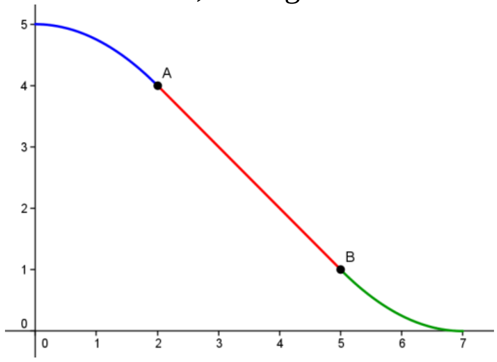
1. En indiquant que les points O et A appartiennent à $\mathcal{C}$, donner deux équations que doivent vérifier les réels a, b, c et d.
2. Pour éviter d'avoir un brusque changement de direction aux points O et A, on souhaite que les tangentes en O et en A à la courbe $\mathcal{C}$ soit parallèle au sol et au plancher. En déduire les valeurs de f '(0) et de f '(4) puis donner deux autres équations que doivent vérifier les réels a, b, c et d.
3. Déduire des équations des questions 1 et 2, les valeurs de a, b, c et d.
4. Tracer alors la courbe $\mathcal{C}$ ainsi que ces tangentes en O et A.

11

Un toboggan en résine doit être construit au bord d'un plan d'eau. Par mesure de sécurité, aucun creux et aucune bosse ne doivent perturber la glissade des enfants qui l'utilisent.

La figure ci-dessous représente une vue en coupe de ce toboggan.

La hauteur est de 5 m, la longueur de 7 m.



La courbe représentant le toboggan admet une tangente horizontale au sommet ainsi qu'à l'arrivée sur le sol.

On modélise le toboggan à l'aide de deux arcs de paraboles :

- sur [0 ; 2], $f(x) = -0{,}25x^2 + 5$
- sur [5 ; 7], $g(x) = 0{,}25x^2 - 3{,}5x + 12{,}25$

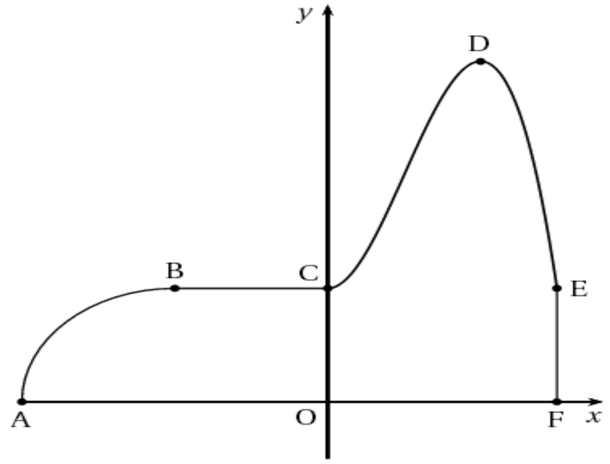
et un segment [AB] qui raccorde les deux arcs de parabole.

Le but est de déterminer la droite qui assurera le meilleur raccordement.

1. Justifier que les arcs de paraboles présentent des tangentes horizontales en D(0 ; 5) et en F(7 ; 0).
2. a. Déterminer l'équation de la tangente en A à la courbe $\mathcal{C}_f$.
b. Déterminer l'équation de la tangente en B à la courbe $\mathcal{C}_g$.
c. Le raccordement par la droite (AB) donne-t-il un bon raccordement ?
d. Pourquoi ne peut-on pas se contenter, pour vérifier le bon raccordement des courbes, des coefficients directeurs des tangentes en A et B ?
3. *Un autre modèle*
On considère la fonction h du troisième degré définie sur [0 ; 7] par $h(x) = 0{,}03x^3 - 0{,}31x^2 + 5$.
a. La courbe $\mathcal{C}_h$ de cette fonction passe-t-elle par les points D et F ?
b. La courbe $\mathcal{C}_h$ a-t-elle des tangentes horizontales en ses points d'abscisses 0 et 7 ?
c. Cette fonction peut-elle modéliser le toboggan ?
d. Trouver un polynôme du 3ème degré permettant de modéliser ce toboggan.

12

On veut réaliser une chauffeuse (fauteuil sans accoudoirs) dont le profil est représenté sommairement dans le repère (O ; x, y) ci-contre. Le repère étant orthonormal (unité non spécifiée), on donne les indications suivantes :



– la ligne reliant les points A et B est un arc de cercle de rayon 2.

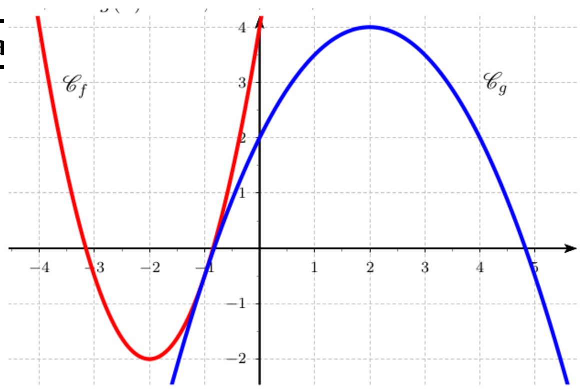
– [BC] est un segment de droite horizontal, [EF] un segment de droite vertical.

– la ligne reliant C à E en passant par le sommet D est la courbe représentative Cf d'une fonction f définie sur [0 ; 3] par

$$f(x) = ax^3 + 3x^2 + b$$

, où a et b sont des nombres à déterminer.

1. En utilisant les coordonnées des points C(0 ; 2) et D(2 ; 6) et la fonction f , écrire un système de deux équations dont les inconnues sont a et b.
Résoudre ce système et donner les valeurs de a et b.
2. On prend par la suite $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$.
On note f' la fonction dérivée de f.
Donner l'expression de f'(x) pour tout x. Cette tangente est-elle la droite (EF) ?
3. a. Justifier à l'aide de la fonction f' que le segment [BC] et la courbe.
Cf ont des tangentes communes au point C.
b. On donne l'abscisse du point E : $x_E = 3$.
Donner le coefficient directeur de la tangente à la courbe Cf au point d'abscisse E.
c. Déterminer les coordonnées de F pour que le raccordement entre la parabole et la droite soit optimal.
4. Déterminer le signe de f'sur l'intervalle [0 ; 3].
5. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur [0 ; 3].



6. À l'aide de la calculatrice, faire un tableau de valeurs.
Sachant de plus que l'abscisse du point A vaut −4, réaliser dans le repère donné, un profil précis de la chauffeuse.

13 Les deux courbes ci-dessous sont des paraboles représentatives des fonctions f et g définies par
$f(x) = 1,5x^2 + 6x + 4$ et $g(x) = -0,5x^2 + 2x + 2$.

1. Montrer que les deux courbes ne se coupent qu'en un seul point.
2. Les deux courbes ont-elles la même tangente en ce point d'intersection ? Justifier la réponse.
3. On souhaite réaliser une frise à l'aide des deux portions de courbes de f et g, comme ci-dessous :

Le raccordement est-il optimal ?