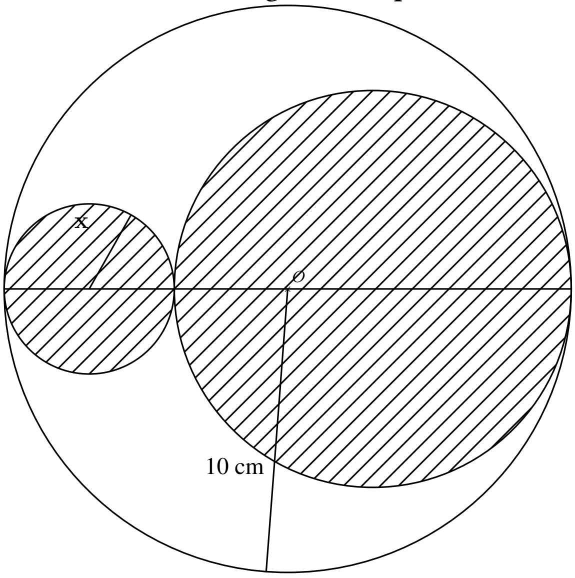
EXERCICE 1

Les disques emboîtés

On note $\mathscr{A}$ l'aire du grand disque ci-dessous.



Pour des raisons esthétiques, il faut que la somme des aires des deux disques soit supérieure ou égale à $\dfrac{5}{8}\mathscr{A}$.

Quelles doivent être les valeurs de x ?

EXERCICE 2

Parmi les fonctions suivantes :

$f(x) = -5x^2 + 3x - 10$
$g(x) = (2x-8)(3x+10)$
$h(x) = (7x-10)^2$
$i(x) = \dfrac{7}{x^2} + 3x - 5$
$j(x) = x(4x-10)$
$k(x) = (10x+4)(x-3) - 2(5x+8)$

1. Quelles sont celles qui sont des fonctions polynômes de degré 2.
2. Pour celles qui sont des polynômes de degré 2, préciser la valeur de a, b et c.

EXERCICE 3

Associer à chaque polynôme du 2^{nd} degré sa forme canonique.

$2x^2 + 12x + 19$	ⓐ	①	$2\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{2}$
$2x^2 + 6x + 8$	ⓑ	②	$2(x-5)^2 - 20$
$x^2 + 10x + 45$	ⓒ	③	$2(x+5)^2 + 20$
$x^2 - 10 + 5$	ⓓ	④	$1 + 2(x+3)^2$

EXERCICE 4

Soit f le polynôme défini par $f(x) = -2(x+3)^2 + 8$. Dresser le tableau de variations de la fonction f et donner les cordonnées du sommet de la parabole.

EXERCICE 5

Pour chacun des polynômes suivants :

$P(x) = 2x^2 + 4x - 3$ et $Q(x) = -(x-2)^2 + 3$

1. Identifier les coefficients
2. Dresser le tableau de variation.

EXERCICE 6

Reconnaître parmi les fonctions suivantes celles qui sont du second degré :

a. $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$

b. $f(x) = (6x - 3)(3x + 1)$

c. $f(x) = (4x + 2)(x - 1) - (2x + 3)^2$

d. $f(x) = x^2 + 4x - 1$

e. $f(x) = 3x^3 + 2x(x - 1) + 5$

f. $f(x) = x + 4x^2 - 5,1$

EXERCICE 7

Pour chacune des fonctions suivantes, écrire $f(x)$ sous la forme $ax^2 + bx + c$ et préciser les coefficients a, b et c.

1. $f(x) = 3 - 2x + x^2$
2. $f(x) = 4x + 5 - 3x^2$
3. $f(x) = (7 - 2x)(3 + 5x)$
4. $f(x) = (3x - 2)^2 + 4x^2$
5. $f(x) = (5x + 1)(3 - 4x) - (3 + 2x)(2 - 5x)$

EXERCICE 8

Soit $\mathscr{P}$ la parabole représentant la fonction
$f(x) = 4(x-3)^2 + 6$

1. Donner les coordonnées du sommet S de la parabole.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

EXERCICE 9

Soit $\mathscr{P}$ la parabole représentant la fonction
$f(x) = -2(x + 5)^2 - 7$

1. Donner les coordonnées du sommet S de la parabole.
2. Donner l'équation de l'axe de symétrie de la parabole.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

EXERCICE 10

Soit $\mathscr{P}$ la parabole représentant la fonction $f(x) = 3x^2 + 42x + 143$

1. Vérifier que la forme canonique de f est $f(x) = 3(x + 7)^2 - 4$
2. En déduire les coordonnées du sommet S de la parabole.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

EXERCICE 11

On note $\mathscr{P}$ la parabole représentant la fonction
$f(x) = ax^2 + 3x - 5$

1. Calculer le nombre a sachant que la parabole $\mathscr{P}$ passe par le point de coordonnées $(2; -5)$
2. Déterminer un autre point de $\mathscr{P}$ d'ordonnée -5.
3. En déduire l'équation de l'axe de symétrie de la parabole $\mathscr{P}$.
4. En déduire les coordonnées du sommet de la parabole $\mathscr{P}$.
5. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

EXERCICE 12

Déterminer les variations de la fonction $f(x) = -7(x + 3)^2 - 5$.

EXERCICE 13

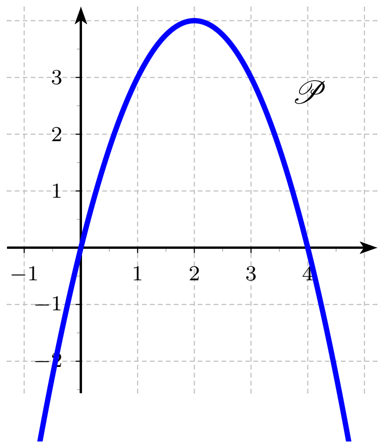
En utilisant un résultat du cours, déterminer les coordonnées du sommet des paraboles suivantes :

1. $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

2. $f(x) = -3x^2 + 5x + 7$
3. $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$

EXERCICE 14

À l'aide de la représentation graphique $\mathscr{P}$ de la fonction f, définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, retrouver les valeurs de a, b et c.

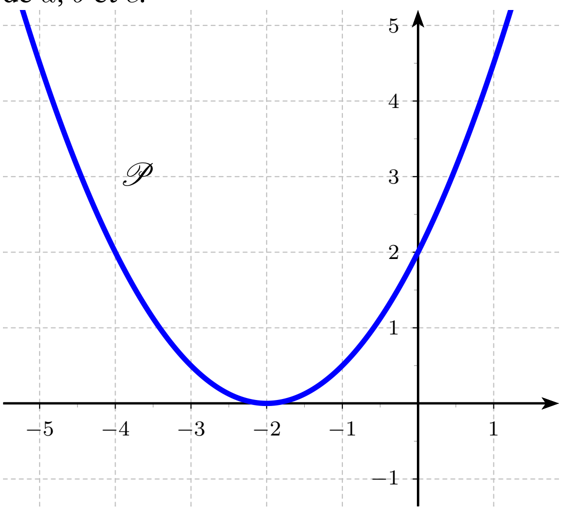


EXERCICE 15

Déterminer le polynôme du second degré de sommet $S(3;4)$ et passant par le point $A(1;6)$.

EXERCICE 16

À l'aide de la représentation graphique $\mathscr{P}$ de la fonction f, définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, retrouver les valeurs de a, b et c.



EXERCICE 17

Résoudre dans les équations suivantes :

1. $2x^2 + 3x - 5 = 0$
2. $5x^2 + 14x - 3 = 0$
3. $-2x^2 - 4x - 3 = 0$
4. $x^2 + 6x + 9 = 0$

EXERCICE 18

Résoudre dans les équations suivantes :

1. $x^2 + 3x + 5 = 0$
2. $x^2 + 14x = 0$
3. $x^2 - 3 = 0$
4. $x^2 + 4x + 3 = 0$

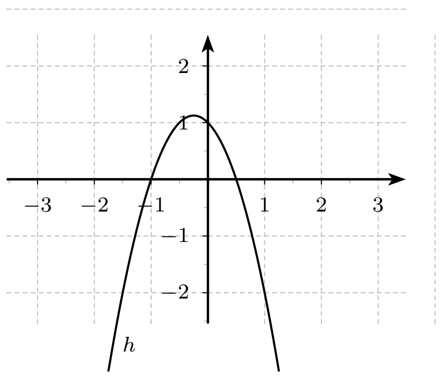
EXERCICE 19

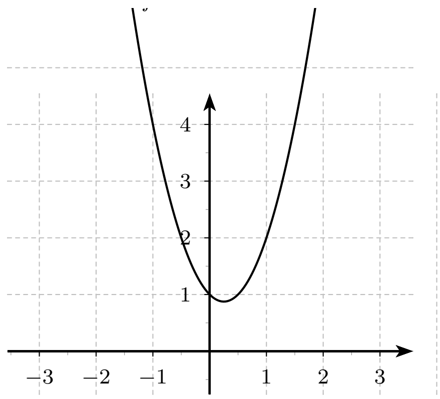
Résoudre dans les équations suivantes :

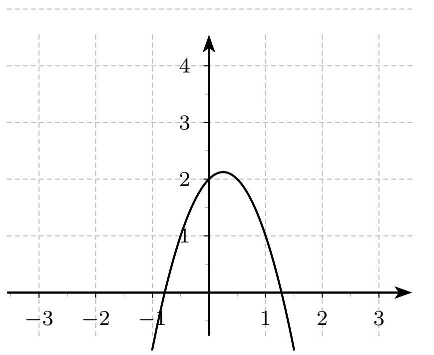
1. $-2x^2 + 3x - 7 = 0$
2. $4x^2 - 4x + 1 = 0$
3. $1,21x^2 - 1,1x - 2 = 0$
4. $-1 + 5x - 2x^2 = 0$

EXERCICE 20

Soit f, g et h trois fonctions polynômes de degré 2 définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 2x^2 - x + 1$; $g(x) = -2x^2 + x + 2$; $h(x) = -2x^2 - x + 1$
Associer à chacune de ces fonctions sa courbe représentative parmi les trois ci-dessous.







EXERCICE 21

On note $\mathscr{P}$ la parabole représentant la fonction
$f(x) = ax^2 + 3x - 5$

1. Calculer le nombre a sachant que la parabole $\mathscr{P}$ passe par le point de coordonnées $(2; -5)$
2. Déterminer un autre point de $\mathscr{P}$ d'ordonnée -5.
3. En déduire l'équation de l'axe de symétrie de la parabole $\mathscr{P}$.
4. En déduire les coordonnées du sommet de la parabole $\mathscr{P}$.
5. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

EXERCICE 22

Déterminer le polynôme du second degré de sommet $S(3; 4)$ et passant par le point $A(1; 6)$.

EXERCICE 23

En utilisant un résultat du cours, déterminer les coordonnées du sommet des paraboles suivantes :

1. $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$
2. $f(x) = -3x^2 + 5x + 7$
3. $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$

EXERCICE 24

Calculer les discriminants des polynômes suivants :

1. $f(x) = 3x^2 + 9x - 5$
2. $f(x) = -5x^2 + 3x + 2$
3. $f(x) = 4x^2 - 7x + 1$
4. $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$

EXERCICE 25

Indiquer le nombre de solutions des équations suivantes :

1. $5x^2 - 4x + 1 = 0$
2. $6x^2 - 3x + 2 = 0$
3. $9x^2 + x - 4 = 0$
4. $3x^2 + 2x - 4 = 5x + 1$

EXERCICE 26

Factoriser lorsque cela est possible les polynômes suivants :

1. $f(x) = -2x^2 - x + 6$
2. $f(x) = -25x^2 + 10x - 1$
3. $f(x) = 13x^2 - 2x + 4$
4. $f(x) = 10x^2 - 23x - 5$

EXERCICE 27

On considère la fonction f, définie par $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$.

1. Construire à l'aide d'une calculatrice graphique la représentation graphique de la fonction f.
2. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
3. Déterminer graphiquement les solutions de $f(x) = 0$.
4. Toujours graphiquement, résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.
5. Déterminer par le calcul les racines de f.

EXERCICE 28

Construire le tableau de signe des polynômes suivants :

1. $f(x) = 21x^2 + 11x - 2$
2. $f(x) = -20x^2 - 7x + 6$
3. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$
4. $f(x) = -6x^2 + 11x - 4$

EXERCICE 29

Résoudre dans les inéquations suivantes :

1. $12x^2 + 5x - 2 > 0$
2. $-3x^2 – 2x + 8 \leqslant 0$
3. $3x^2 + 10x + 8 < 0$

EXERCICE 30

Résoudre dans les inéquations suivantes :

1. $4x^2 + 9x > 0$
2. $2x^2 + 5x + 6 > 0$
3. $-2x^2 + 4x + 3 \leqslant 0$
4. $5x^2 + 15x - 300 \leqslant 50$

EXERCICE 31

Soit $\mathscr{P}$ la parabole qui représente la fonction
$f : x \longmapsto x^2 + x - 56$.

1. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{P}$ avec l'axe des ordonnées.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B de la parabole $\mathscr{P}$ avec l'axe des abscisses.
3. En déduire les coordonnées du sommet S de la parabole $\mathscr{P}$.
4. Déterminer le signe de la fonction f.
5. Vérifier ces résultats en affichant la parabole $\mathscr{P}$ sur une calculatrice après avoir réglé la fenêtre d'affichage.

Exercice 32

Calculer les dimensions d'un champ rectangulaire dont le périmètre mesure 200 m et son aire 2 100m^2.

Exercice 33

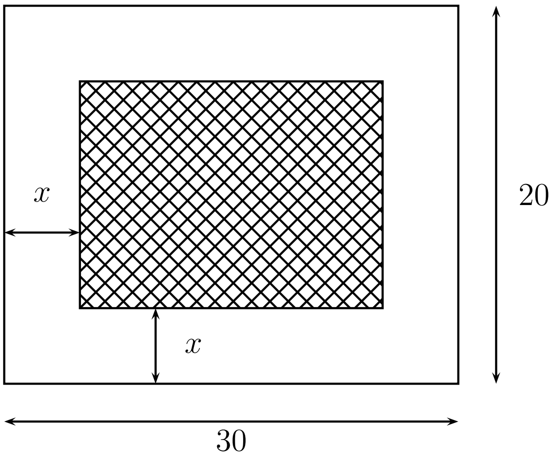
Soit $ABCD$ un rectangle de longueur $AB = x$ avec $1 < x < 2$ et de largeur $AD = 1$.
Soit E sur $[AB]$ et F sur $[CD]$ tels que $AEFD$ soit un carré. Faire une figure.
On appelle format d'un rectangle, le quotient de la longueur par la largeur de ce rectangle.

1. Exprimer, en fonction de x, les formats de chacun des rectangles $ABCD$ et $EBCF$.
2. Quelle relation doit vérifier x pour que $ABCD$ et $EBCF$ aient le même format ? Montrer que x vérifie alors l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
3. (a) Résoudre dans l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
   (b) On désigne par ϕ la solution positive. Déterminer la valeur exacte de ϕ, puis la valeur approchée arrondie à 10^{-3} près. Dans ce cas, on dit que $ABCD$ est un rectangle d'or.

Exercice 34

Un parc rectangulaire a pour dimension 30 mètres et 20 mètres. Une allée de largeur x fait le tour du parc à l'intérieur.

1. Exprimer en fonction de x, l'aire $\mathscr{A}(x)$ de l'allée.
2. Comment faut-il choisir la largeur x de cette allée pour que son aire soit égale au cinquième de l'aire totale du parc. Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée au centième.



Exercice 35

1. (a) Montrer que la fonction $f(x) = (42 - 2x)(500 + 100x)$ a pour forme canonique : $f(x) = -200(x - 8)^2 + 33\,800$
   (b) En déduire le maximum de la fonction f et pour quelle valeur de x est-il atteint ?
2. L'organisateur d'un concert a remarqué qu'à 42 € la place, il peut compter sur 500 spectateurs et que chaque baisse de 2 € lui amène 100 personnes de plus. On suppose enfin que l'organisateur ne s'intéresse qu'aux baisses de prix de 0 €, 2 €, 4 €, 6 €, 8 €, etc.
   (a) Après x baisses de 2 €, exprimer, en fonction de x :
   - le prix de la place de concert ;
   - le nombre de spectateurs ;
   - le montant de la recette.

   (b) Combien l'organisateur doit-il faire payer la place pour obtenir un revenu maximal ? Justifier.

Exercice 36

Dans le cadre d'un atelier expérimental, un groupe de lycéens a fabriqué des micro-fusées.
Lors d'un essai, ils ont lancé verticalement une de ces micro-fusées, à la vitesse de 20 m/s. La hauteur h (en mètres) atteinte par la micro-fusée en fonction du temps t (en secondes) est donnée par :
$h(t) = -5t^2 + 20t + 1,6$.

1. En justifiant les réponses, répondre aux questions suivantes :
   (a) Quelle est la hauteur de la micro-fusée au bout de 1 seconde ? 3 secondes ?
   (b) De quelle hauteur la micro-fusée est-elle lancée ?
   (c) A quel instant t_0 la micro-fusée touche-t-elle le sol ? On donnera la valeur arrondie de t_0 au dixième de seconde près
2. On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction h définie sur $[0\,;t_0]$, dans un repère orthogonal $(\mathrm{O};\mathrm{I};\mathrm{J})$ d'unités 2 cm en abscisses et $0,5$ cm en ordonnées.
   (a) Montrer que la forme canonique de la fonction h est $h(t) = -5(t-2)^2 + 1,6$.
   (b) Donner les coordonnées du sommet de la parabole $\mathscr{C}$. Interpréter ce résultat en terme de hauteur de la micro-fusée.
   (c) Établir le tableau de variation de h.
   (d) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.
   (e) Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :
   $h(t) = 1,6\,;\, h(t) = 12\,;\, h(t) \geqslant 16$
3. En utilisant le discriminant uniquement quand cela est utile, déterminer par le calcul à quel(s) instant(s) la micro-fusée atteindra la hauteur de :
   $1,6$ mètre ; 12 mètres (On donnera si besoin, la valeur arrondie au dixième de seconde près du résultat.)
4. Déterminer par le calcul l'intervalle de temps pendant lequel la micro-fusée dépasse la hauteur de 16 m.
5. Les résultats obtenus aux questions 3. et 4. correspondent-ils à ceux de la question 2.e. ?

Exercice 37

Le périmètre d'un rectangle mesure 12 cm.

1. Soit x la longueur, en cm, de ce rectangle. Dans quel intervalle varie x ?
2. Quelle est la mesure de la largeur en fonction de x ?
3. Calculer l'aire de ce rectangle en fonction de x.
4. On souhaite que l'aire de ce rectangle soit supérieure à 5cm^2.
   Quelle inéquation doit-on résoudre ?
   Résoudre alors cette inéquation et en déduire quelles dimensions donner à la longueur.

Exercice 38

On considère une fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\,(x-4)^2 - 1$.

1. Déterminer l'équation de l'axe de symétrie de la courbe représentant h.
2. Déterminer les coordonnées du somment de la courbe représentant h.

Exercice 39

On considère une fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 5\,(x-5)^2 + 2$.

1. Déterminer l'équation de l'axe de symétrie de la courbe représentant h.
2. Déterminer les coordonnées du somment de la courbe représentant h.

Exercice 40

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Cette fonction s'exprime de 3 façons :

a. $f(x) = 4\,(x-2)^2 - 4$
b. $f(x) = 4x^2 - 16x + 12$
c. $f(x) = 4(x-1)(x-3)$

Après avoir choisi la forme qui paraît la plus adaptée, donner la (ou les) solution(s) de l'équation $f(x) = 12$.

Exercice 41

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Cette fonction s'exprime de 3 façons :

a. $f(x) = 3\left(x+3\right)^2 - 24$

b. $f(x) = 3x^2 + 12x - 15$

c. $f(x) = 3(x-1)(x+5)$

Après avoir choisi la forme qui paraît la plus adaptée, donner la (ou les) solution(s) de l'équation $f(x) = 5$.

EXERCICE 42

Associer à chaque polynôme du 2nd degré sa forme factorisée.

$x^2 - 2x - 3$	ⓐ	①	$(x+1)(x-3)$
$-3x^2 - 3x + 6$	ⓑ	②	$2(x-1)(x+2)$
$\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$	ⓒ	③	$-3(x-1)(x+2)$
$2x^2 + 2x - 4$	ⓓ	④	$\frac{1}{3}(x-3)^2$
$\frac{1}{3}x^2 - x + 3$	ⓔ	⑤	$2(x+1)(x+3)$
		⑥	$\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$

EXERCICE 43

Associer à chaque polynôme du 2nd degré sa forme canonique.

$x^2 - 16x + 64$	ⓐ	①	$2\left(x+3\right)^2 + 5$
$2x^2 + 12x + 23$	ⓑ	②	$-4\left(x-\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{1}{16}$
$-2x^2 + 2x - \frac{5}{2}$	ⓒ	③	$-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - 2$
$-4x^2 + x$	ⓓ	④	$\left(x-8\right)^2$

EXERCICE 44

Déterminer les racines éventuelles des polynômes proposés, puis factoriser si cela est possible à l'aide des formules du cours.

a. $2x^2 + 3x + 1$

b. $4x^2 - 12x - 16$

c. $4x^2 + 4x + 1$

d. $4x^2 + 3x + 5$

EXERCICE 45

Factoriser en utilisant l'outil Mathématique adéquat !

a. $2x^2 + 3x$

b. $4x^2 - 16$

c. $2x(5x-1) + 3x^2$

d. $(2x-7)^2 - 25$

e. $5x^2 - 35x - 40$

EXERCICE 46

Soit x un nombre réel.

Dans chaque cas, étudier le signe de l'expression en choisissant la démarche Mathématiques adéquat !

a. $x^2 + 1$

b. $(x-3)^2+4$

c. $-3x^2-1$

d. $2x^2+x$

e. $2x^2-4x-6$